

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ
ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΑΡΤΙΟΣ 1999

ΤΑΞΗ Γ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1^ο) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = g(x) |x - 1|$, όπου $g(x)$ είναι ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού που έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $h(x) = x^2 + bx + c$.

Αν ισχύει $(b - 1)^2 < 3(c - b)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ναδειχτεί ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2^ο) Δίνεται ο κύκλος $c: (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$, όπου $\rho > 1$ και η εφαπτομένη του $\varepsilon: 3x + 4y + 5 = 0$. Αν d είναι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου c από την αρχή των αξόνων O , ναδειχτεί ότι $d \geq \rho - 1$

ΦΥΣΙΚΗ

Μεταλλικό ομογενές σύρμα μάζας $M = 10\text{gr}$, πυκνωτή-
τας $d = 10\text{ gr/cm}^3$ και ειδικής αντίστασης $\rho = 5/\pi \cdot 10^{-8}\Omega\text{M}$
κάμπτεται ώστε να σχηματίσει κυκλικό αγωγό ακτίνας
 $r = 10\text{cm}$. Τα άκρα του συνδέονται ώστε να σχηματίσει με
τους οπλισμούς πυκνωτή χωρητικότητας $c = 5\text{mF}$. Το
σύστημα, τη χρονική στιγμή $t = 0$, τοποθετείται κάθετα στις
δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου, του οποίου η
ένταση μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $B = 0,2t$.

Να βρεθούν:

α) Το ηλεκτρικό ρεύμα I_0 που διαρρέει τον αγωγό τη
χρονική στιγμή $t = 0$.

Β) Ποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της τάσης
στα άκρα του πυκνωτή ισούται με το μισό της μέγιστης
τιμής του.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ
ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΑΡΤΙΟΣ 1999

ΤΑΞΗ Α

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1^ο) Οι πλευρές των τριγώνων $AB\Gamma$, $A_1B_1\Gamma_1$, $A_2B_2\Gamma_2$ αντιστοίχως είναι $\alpha+2\beta$, $\alpha+3\beta$, $\alpha+9\beta$,

$$\alpha_1+\beta_1, 2\alpha_1+3\beta_1, 4\alpha_1+2\beta_1$$

$$\alpha_2+\beta_2, \alpha_2+2\beta_2, \alpha_2+8\beta_2$$

όπου $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0$.

Οι λόγοι $\alpha/\beta, \alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2$ βρέθηκαν ίσοι με $16/3, 7/4, 9/2$ όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη πλευρά σε καθένα από τα τρία τρίγωνα και στη συνέχεια να βρείτε ποια τιμή έχει ο καθένας από τους λόγους $\alpha/\beta, \alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2$.

- **ΘΕΜΑ 2^ο** Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\alpha x - \beta| + |\gamma x - \delta| = 2|x - 2|.$$

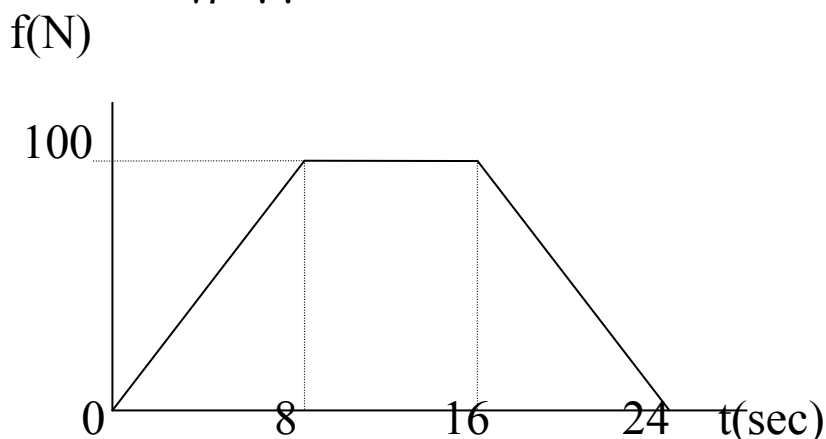
Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$$

-
-
-
-
-
-
-
-

ΦΥΣΙΚΗ

Ένα κινητό μάζας $m=10\text{Kg}$ είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F σταθερής διεύθυνσης, της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο διάγραμμα



Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης και στατικής τριβής είναι $\mu=\mu_0=0,5$. Δίνεται : $g = 10 \text{ m/s}^2$

- • α) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται.
- • β) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 8\text{sec}$ και $t^2 = 24 \text{ sec}$.
- • γ) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος από το 8° έως το 16° sec αν είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του την χρονική στιγμή $t_1 = 8\text{sec}$ είναι $U=10\text{m/s}$.

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ
ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
MΑΡΤΙΟΣ 1999

ΤΑΞΗ Β

ΘΕΜΑ 1^ο) Τα μέτρα των γωνιών Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογα των αριθμών 1, 2, 4 αντίστοιχα.

α) Οι γωνίες (σε ακτίνια) του ΑΒΓ είναι:

$$A = \quad B = \quad \Gamma =$$

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι: Α. ορθογώνιο και σκαληνό

B. αμβλυγώνιο και σκαληνό

Γ. οξυγώνιο και σκαληνό

Δ. αμβλυγώνιο και ισοσκελές

Ε. οξυγώνιο και ισόπλευρο

γ) η εξίσωση $(2\sin A)x^2 + x - \sin\theta \cdot \sin\Gamma = 0$ έχει:

A. δύο άνισες ρίζες

B. μοναδική λύση

Γ. άπειρες λύσεις

δ) Να αποδειχθεί ότι:

$$(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0$$

ΘΕΜΑ 2^ο) Δίνονται οι κύκλοι (Κ, 1) και (Λ, $\sqrt{2}$) με ΚΛ = 2

α) Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Α,Β.

ΣΩΣΤΟ



ΛΑΘΟΣ



β) το μήκος του ΑΒ είναι :

$$A. 7 \quad B. 14 \quad \Gamma. \sqrt{7} \quad \Delta. \sqrt{7}/2 \quad E. 2\sqrt{7}$$

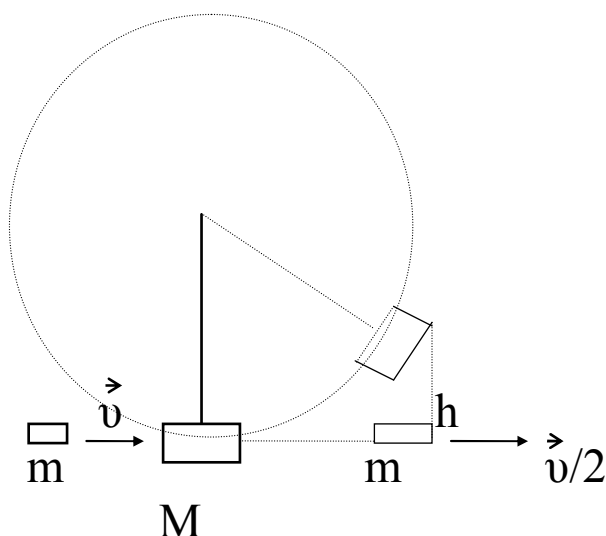
γ) Έστω ΑΓ χορδή του (Λ, $\sqrt{2}$), η οποία έχει το μέσο της Μ στον κύκλο (Κ, 1). Να εκφράσετε τα τμήματα ΒΓ, ΒΜ συναρτήσει του ημιτόνου της γωνίας $\varphi = \angle B\hat{A}\Gamma$

δ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΓ.

ΦΥΣΙΚΗ

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, βλήμα μάζας $m=100\text{ gr}$ και ταχύτητας U διαπερνά την ακίνητη στη θέση της κατακορύφου μάζα $M = 1\text{ Kg}$ και εξέρχεται με ταχύτητα $U/2$. Η μάζα M αιωρείται από το σημείο O μέσω αβαρούς νήματος μήκους $l = 1,6\text{ m}$.

Δίνεται: $g = 10\text{ m/s}^2$



Να βρεθούν:

α) Η ταχύτητα του βλήματος $\vec{u}$ ώστε το σώμα μάζας M να φθάσει σε ύψος $h = 0,8\text{ m}$

β) Η ταχύτητα του βλήματος u ώστε το σώμα μάζας M μόλις να διαγράψει τον εστιγμένο κύκλο.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη στιγμή που το νήμα είναι οριζόντιο και το σώμα ανεβαίνει στην περίπτωση της δεύτερης ερώτησης.

A' Λυμμένων

① Στο $\triangle ABC$ μεγαλύτερη πλευρά η $a+9b$, άρα

$$a+9b < (a+2b) + (a+3b) \Leftrightarrow 4b < a \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 4 \quad (1)$$

Στο $\triangle B_1C_1A_1$ μεγαλύτερη πλευρά η a_2+8b_2 , άρα

$$a_2+8b_2 < (a_2+b_2) + (a_2+2b_2) \Leftrightarrow 5b_2 < a_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{b_2} > 5 \quad (2)$$

Στο $\triangle A_1B_1C_1$ η πλευρά $2a_1+3b_1$ θα είναι μεγαλύτερη όταν

$$2a_1+3b_1 > 4a_1+2b_1 \Leftrightarrow b_1 > 2a_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{2} \quad (3)$$

Τότε λόγω της ανισότητας $2a_1+3b_1 < (a_1+b_1) + (4a_1+2b_1)$

$$\Leftrightarrow 2a_1+3b_1 < 5a_1+3b_1 \Leftrightarrow 3a_1 > 0 \text{ που ισχύει}$$

Λόγω των (1), (2), (3) θα έχουμε $\frac{a}{b} > 4$, $\frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{2}$, $\frac{a_2}{b_2} > 5$ που

αποσπλώνεται στο πανέναντο λόγο δυν δόθηκε μικρότερο

$$\text{του } \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{2} \right)$$

Στο $\triangle A_1B_1C_1$ η πλευρά $4a_1+2b_1$ θα είναι η μεγαλύτερη όταν

$$2a_1+3b_1 < 4a_1+2b_1 \Leftrightarrow b_1 < 2a_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} > \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\text{Τότε } 4a_1+2b_1 < (a_1+b_1) + (2a_1+3b_1) \Leftrightarrow a_1 < 2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} < 2 \quad (5)$$

$$\text{Λόγω (4) και (5) } \frac{1}{2} < \frac{a_1}{b_1} < 2 \quad (6)$$

Από τις (1), (2), (6) έχουμε $\frac{a}{b} > 4$, $\frac{1}{2} < \frac{a_1}{b_1} < 2$, $\frac{a_2}{b_2} > 5$

$$\text{άρα } \frac{a}{b} = \frac{9}{2}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{7}{4}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{16}{3}$$

② Για $x=2$ έχουμε $|2a-b| + |2\gamma-\delta| = 0 \Leftrightarrow b=2a$ και $\delta=2\gamma$, τότε

$$|ax-b| + |\gamma x-\delta| = 2|x-2| \Leftrightarrow |ax-2a| + |\gamma x-2\gamma| = 2|x-2| \Leftrightarrow$$

$$|a||x-2| + |\gamma||x-2| = 2|x-2| \Leftrightarrow |x-2|(|a| + |\gamma| - 2) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα } |a| + |\gamma| = 2$$

$$\text{άρα } |a| + |b| + |\gamma| + |\delta| = |a| + |2a| + |\gamma| + |2\gamma| = |a| + 2|a| + |\gamma| + 2|\gamma| =$$

$$= 3|a| + 3|\gamma| = 3(|a| + |\gamma|) = 3 \cdot 2 = 6$$

Γ' Τάξη

① Είμαι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)(x-1)}{x-1} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -g(1)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$

Δρα $g(1) = -g(1) \Leftrightarrow g(1) = 0$.

Άρα το $g(x)$ έχει ρίζα για $x=1$, οπότε

$g(x) = (x-1)(x^2 + \theta x + \gamma) = x^3 + \theta x^2 + \gamma x - x^2 - \theta x - \gamma = x^3 + (\theta-1)x^2 + (\gamma-\theta)x - \gamma$

$g'(x) = 3x^2 + 2(\theta-1)x + \gamma - \theta$

Μα εμείς $\Delta = 4(\theta-1)^2 - 12(\gamma-\theta) = 4[(\theta-1)^2 - 3(\gamma-\theta)] < 0$

Δρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα

② $d(K, \varepsilon) = p \Leftrightarrow \frac{|3\alpha + 4\theta + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = p \Leftrightarrow |3\alpha + 4\theta + 5| = 5p$ ①

Ισχύει $|3\alpha + 4\theta + 5| \leq |3\alpha + 4\theta| + 5$ οπότε $5p \leq |3\alpha + 4\theta| + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(p-1) \leq |3\alpha + 4\theta|$ ②

Είμαι $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ και $\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix}$ ώστε $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\vec{v}, \vec{u})$

οπότε $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq |\vec{v}| |\vec{u}|$

Δρα $|3\alpha + 4\theta| \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \theta^2} \Leftrightarrow |3\alpha + 4\theta| \leq 5d$ ③

Αν ως ② και ③ να πάρουμε $5(p-1) \leq 5d \Leftrightarrow d \geq p-1$.