

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ
ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2000

ΤΑΞΗ Α'

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1ο:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \lambda \cdot x + \mu$ και

$g(x) = \mu \cdot x + \lambda$, $\mu \neq \lambda$, $\mu, \lambda, x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$
ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι $h(f(\lambda) - f(\mu)) > h(g(\lambda) - g(\mu))$

γ) Να αποδείξετε ότι: $h(2001) > h(2000) + h(0)$.

Θέμα 2ο:

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και

Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Έστω Ε τυχαίο σημείο του ΟΔ.

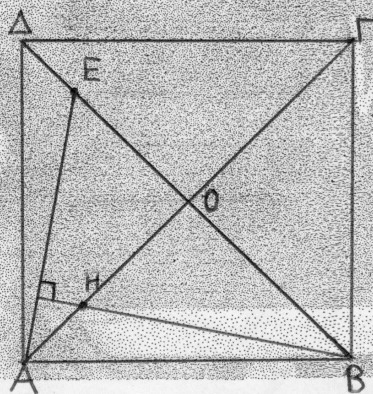
Φέρνουμε κάθετο από το Β στην ΑΕ
που τέμνει την ΑΟ στο Η. Να αποδείξετε

ότι: α) ΒΗ = ΑΕ

β) ΓΗ = ΒΕ

γ) $AB^2 - AE^2 = BE \cdot AE$

δ) $BE^2 + DE^2 = 2AE^2$



Μ. Χρυσόπουλος
Κ. Γουρβαρίδης
Γ. Μεταγιάννης

Καλή Επιστροφή

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Α ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 1ο

$$\begin{aligned} \alpha) \quad h(x) &= \lambda(\lambda x + \mu) + \mu(\mu x + \lambda) \\ &= \lambda^2 x + \lambda\mu + \mu^2 x + \mu\lambda = (\lambda^2 + \mu^2)x + 2\lambda\mu \end{aligned}$$

Επειδή $\lambda \neq \mu$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ άρα η h είναι γνήσιας αύξουσα

$$\beta) \quad f(\lambda) - f(\mu) = \lambda^2 + \mu - \mu\lambda - \mu = \lambda^2 - \lambda\mu$$

$$g(\lambda) - g(\mu) = \lambda(\mu + \lambda) - \mu^2 - \lambda = \lambda\mu - \mu^2$$

Επειδή η h από το α) είναι γν. αύξουσα αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(\lambda) - f(\mu) > g(\lambda) - g(\mu) \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda\mu > \lambda\mu - \mu^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + \mu^2 - \lambda\mu - \lambda\mu > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - \mu)^2 > 0 \quad \text{ισχύει αφού } \lambda \neq \mu.$$

$$\gamma) \quad h(2001) = (\lambda^2 + \mu^2)2001 + 2\lambda\mu$$

$$h(2000) = (\lambda^2 + \mu^2)2000 + 2\lambda\mu$$

$$h(0) = 2\lambda\mu.$$

$$\text{Έχουμε } h(2001) > h(2000) + h(0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 + \mu^2)2001 + 2\lambda\mu > (\lambda^2 + \mu^2)2000 + 2\lambda\mu + 2\lambda\mu \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 + \mu^2)2001 - (\lambda^2 + \mu^2)2000 - 2\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 + \mu^2)(2001 - 2000) - 2\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 + \mu^2)1 - 2\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - \mu)^2 > 0 \quad \text{ισχύει αφού } \lambda \neq \mu.$$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Συμπληρώστε τα τρίγωνα $\triangle ABH$ και $\triangle ADE$

$\triangle ABH$ και $\triangle ADE$

$$AB = AD$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ$$

$$\hat{B}_2 = \hat{A}_3 = 90 - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

από $\triangle ABH = \triangle ADE$ από $BH = AE$ και

$$DE = AH$$

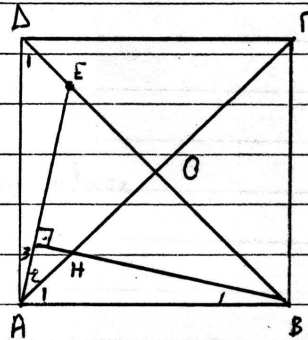
β) $GH = GO + OH$

$$BE = BO + OE$$

Επειδή $OH = OE$ ως διαφορά ίσων επί τμήματων και $GO = BO$ από $GH = BE$

$$\gamma) AB^2 - AE^2 = AD^2 + DB^2 - DE^2 - AD^2 = DB^2 - DE^2 = (DB - DE) \cdot (DB + DE) = (OA - OE) \cdot BE = AE \cdot BE$$

$$\delta) BE^2 + DE^2 = (BO + OE)^2 + (OA - OE)^2 = BO^2 + OE^2 + 2BO \cdot OE + OA^2 + OE^2 - 2OA \cdot OE = 2OE^2 + 2OA^2 = 2(OE^2 + OA^2) = 2AE^2$$



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ
ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2000

ΤΑΞΗ Β'

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1ο

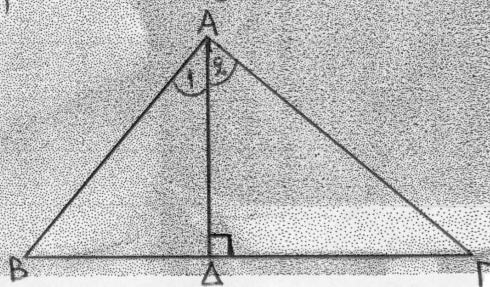
Δίνεται το τριώνυμο $x^2 + κ \cdot x + λ = 0$, $κ, λ \in \mathbb{R}$.

- Αν ισχύει η σχέση $|κ| - |λ| > 1$, $λ \neq 0$, Να αποδείξετε
ότι α) Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.
β) Οι ρίζες του τριωνύμου δεν είναι δυνατό να
είναι και οι δύο ακέραιοι αριθμοί.

Θέμα 2ο

Σε τρίγωνο $ABΓ$ φέρουμε το ύψος AD . Αν
ισχύει η σχέση: $\frac{ΔΓ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2}$, Να αποδείξετε ότι:

$$AB = AG \text{ ή } \hat{A} = 90^\circ$$



Μ. Χριστογιάννης
Κ. Γρηγοριάδης
Γ. Ματθαίου

Καλή Επιστροφή

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Β ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 1ο

α) $\Delta = \kappa^2 - 4\lambda$

Διακρίνω περιπτώσεις :

Αν $\lambda < 0$ τότε $-4\lambda > 0$ άρα $\Delta = \kappa^2 - 4\lambda > 0$ $\lambda \neq 0$

Αν $\lambda > 0$ τότε $|\lambda| = \lambda$ και από την υπόθεση $|\kappa| - |\lambda| > 1 \Leftrightarrow$

$$|\kappa| > |\lambda| + 1 \Leftrightarrow |\kappa| > \lambda + 1 \Leftrightarrow |\kappa|^2 > (\lambda + 1)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 > \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Τότε η $\Delta = \kappa^2 - 4\lambda > \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \geq 0$ άρα $\Delta > 0$

β) Έστω x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου τότε

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\kappa \\ x_1 x_2 = \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τότε} \\ |x_1 + x_2| = |- \kappa| = |\kappa| \\ |x_1 x_2| = |\lambda| \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} |x_1 + x_2| - |x_1 x_2| = |\kappa| - |\lambda| > 1 \end{array} \right\} \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{όμως} \\ |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \end{array} \right\} \begin{array}{l} |x_1| + |x_2| > 1 + |x_1 x_2| \\ \text{Από} \textcircled{1} \quad |x_1 + x_2| > 1 + |x_1 x_2| \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} |x_1| + |x_2| - 1 - |x_1| |x_2| > 0 \\ |x_1| (1 - |x_2|) - (1 - |x_2|) > 0 \\ (1 - |x_2|) (|x_1| - 1) > 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα} \quad \begin{array}{l} 1 - |x_2| > 0 \\ |x_1| - 1 > 0 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} 1 - |x_2| < 0 \\ |x_1| - 1 < 0 \end{array}$$

$1 - |x_2| > 0 \Leftrightarrow |x_2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x_2 < 1$. άρα $x_2 = 0$ ^{ατόνο} γιατί από τη $|x_1 x_2| = \lambda$ για $|x_2| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x_1| > 1$ $x_1 > 1$ ή $x_1 < -1$ $x_2 = 0$ εφόσον $\lambda = 0$ ($\lambda \neq 0$).

όπως και όταν $\begin{array}{l} 1 - |x_2| < 0 \\ |x_1| - 1 < 0 \end{array}$

ΘΕΜΑ 2ο

Από το Δεδομένο Ουκείνι ισχύει

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$$

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{A\Gamma^2}{AB^2}$$

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2}{A\Delta^2 + \Delta B^2}$$

$$\Delta\Gamma(A\Delta^2 + \Delta B^2) = \Delta B(A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2)$$

$$\Delta\Gamma A\Delta^2 + \Delta\Gamma \Delta B^2 - \Delta B A\Delta^2 - \Delta B \Delta\Gamma^2 = 0$$

$$A\Delta^2(\Delta\Gamma - \Delta B) + \Delta\Gamma \Delta B(\Delta B - \Delta\Gamma) = 0$$

$$(\Delta B - \Delta\Gamma)(\Delta\Gamma \Delta B - A\Delta^2) = 0$$

$$\Delta B = \Delta\Gamma \text{ ή } \Delta\Gamma \Delta B = A\Delta^2$$

Από τη σχέση $\Delta B = \Delta\Gamma$ και επειδή AA είναι υψος και διάμετρος το

$\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές ή $AB = A\Gamma$

Από τη σχέση $A\Delta^2 = \Delta B \Delta\Gamma$ έχουμε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$ και επειδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90^\circ$

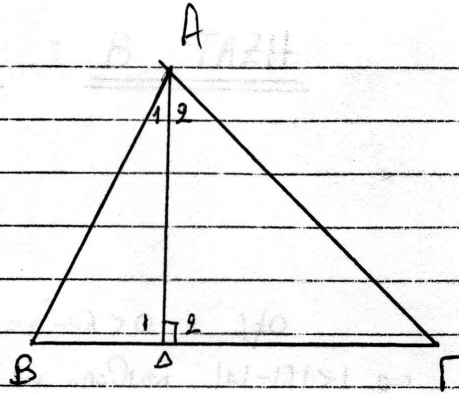
τα τρίγωνα $\Delta AB \sim \Delta A\Gamma$ από $\hat{B} = \hat{A}_2$ ή $\hat{B} = \hat{A}_2$ ή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$
 $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$
 $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$

$$\text{ισχύει όμως } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{A} = 180^\circ$$

$$2\hat{A} = 180^\circ$$

$$\hat{A} = 90^\circ$$



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ
ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2000
ΤΑΞΗ Γ'

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1^ο

Να προσδιορίσετε τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ που ικανοποιούν τη σχέση $[P'(x)]^2 = P(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = c(1+a)^x - a^x \quad a, x > 0$$

i) Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2001^x - 2000^x = 3(2000^8 + 2000) + 1$$

Μ. Χριστοφί

Κ. Γαργαλιάνη

Γ. Μετακινιώτη

Καλή Επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: Γ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 1ο

Εστω ο βαθμός του $P(x)$ είναι v τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $v-1$
και ο βαθμός του $[P'(x)]^2$ θα είναι $2(v-1)$.

$$\text{Αρα } 2(v-1) = v$$

$$2v - 2 = v$$

$$2v - v = 2 \text{ δηλ } v = 2.$$

$$\text{Αρα το } P(x) = ax^2 + bx + \gamma \quad a \neq 0, \text{ και } P'(x) = 2ax + b \text{ και } [P'(x)]^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

$$\text{Εστω } [P'(x)]^2 = P(x)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = ax^2 + bx + \gamma \quad \text{οποτε}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a^2 = a \\ 4ab = b \\ \gamma = b^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4a^2 - a = 0 \\ 4ab - b = 0 \\ \gamma = b^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a(4a-1) = 0 \\ b(4a-1) = 0 \\ \gamma = b^2 \end{array} \right.$$

Επειδή $a \neq 0$, από $4a-1=0$ δηλ $a = \frac{1}{4}$ από οποιοδήποτε $b \in \mathbb{R}$
και $\gamma = b^2 \quad b \in \mathbb{R}$

$$\text{Επομένως το } P(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2 \quad b \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 2°

i) $f(x) = (1+x)^x \ln(x+1) - x^x \ln x$.

$$\left. \begin{array}{l} a+1 > a \quad \text{και} \quad (a+1)^x > a^x \\ \text{και} \quad \ln(a+1) > \ln a \end{array} \right\} \begin{array}{l} (a+1)^x \ln(a+1) > a^x \ln a. \quad \text{δηλ} \\ (a+1)^x \ln(a+1) - a^x \ln a > 0 \\ f'(x) > 0 \end{array}$$

και η $f(x)$ είναι γρ. αύξουσα.

ii). Για $x=2000$ η $f(x) = 2001^x - 2000^x$. ①

Επίσης έχουμε: $(2000+1)^3 = 2000^3 + 3 \cdot 2000^2 + 3 \cdot 2000 + 1$ δηλ

$$(2000+1)^3 - 2000^3 = 3 \cdot 2000^2 + 3 \cdot 2000 + 1. \quad \text{②}$$

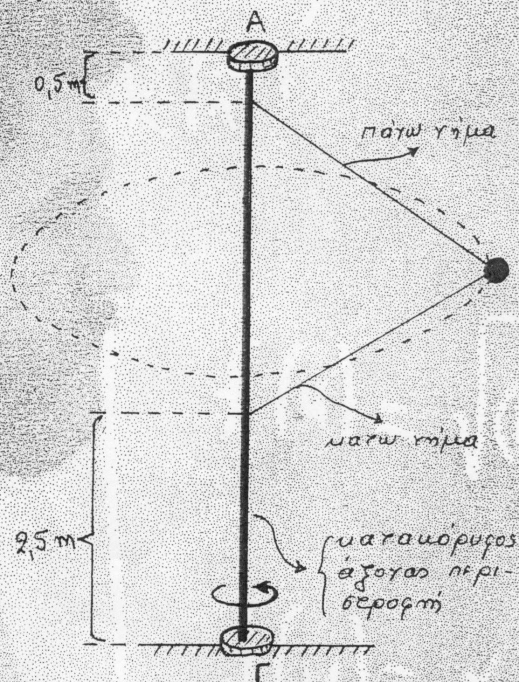
Η επίλυση $2001^x - 2000^x = 3 \cdot (2000^2 + 2000) + 1$ και ως ομοίως ①, ② γίνεται

$$f(x) = f(3) \quad \text{και επειδή η } f \text{ είναι γρ. αύξουσα και 1-1}$$

δηλ $x=3$

ΦΥΣΙΚΗ Α' ΤΑΞΗΣ

Η σφαίρα του σχήματος έχει μάζα 1 kg και τα τμήματα μήκους 3 m το καθένα. Ο κατακόρυφος άξονας που στηρίζεται στα σημεία Α και Γ, περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Με την ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστρέφεται και η σφαίρα διαγράφοντας οριζόντια κυκλική τροχιά με τα τμήματα τεταμένα και τα σχηματίζουν με τον κατακόρυφο άξονα ισόπλευρο τρίγωνο. Η



τάση στο κάτω τμήμα είναι 60 N και η επιτάχυνση στη βαρύτητα $g=10\text{ m/s}^2$. Η μάζα των τμημάτων, το πάχος του άξονα περιστροφής, και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέα.

Αποκρίνετε στις παρακάτω ερωτήσεις

- Να σχεδιάσετε και να ονομάσετε τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω στη σφαίρα (3 μονάδες)
- Πόση είναι η τάση στο ματω τμήμα (4 μονάδες)
- Ποιά είναι το μέτρο της ταχύτητας στη σφαίρα (5 μονάδες)
- Όταν η σφαίρα βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα: Να σχεδιάσετε τις οριζόντιες δυνάμεις που εφαρμόζονται στα σημεία στηρίξης του άξονα Α και Γ και να βρείτε το άθροισμα αυτών των δυνάμεων και το λόγο των μέτρων τους (6 μονάδες)

2000 Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ένα κομμάτι ξύλου έχει μάζα 1,9 kg και ισορροπεί 5 m ψηλότερα από το δάπεδο , κρεμασμένο από ένα νήμα μήκους 1 m και αντοχής 52N . Η άλλη άκρη του νήματος είναι στερεωμένη στην οροφή . Ένα βλήμα με μάζα 100 g κινούμενο οριζόντια σφηνώνεται μέσα στο ξύλο . Να βρεθούν :

α) Η μικρότερη ταχύτητα που μπορεί να έχει το βλήμα , τέτοια ώστε ενσωματούμενο με το ξύλο να κοπεί το νήμα . (8 μονάδες)

β) Ο ρυθμός της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος .

α) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα (2 μονάδες)

β) Τη στιγμή που το συσσωμάτωμα φτάνει στο δάπεδο . (5 μονάδες)

γ) Η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος από τη στιγμή που κόβεται το νήμα μέχρι τη στιγμή που το συσσωμάτωμα φτάνει στο δάπεδο . (5 μονάδες)

Δίνεται $g = 10 \text{ m / s}^2$

Να υποθέσετε ότι κατά τη διάρκεια που το βλήμα σφηνώνεται μέσα στο ξύλο , το ξύλο παραμένει ακίνητο και το νήμα κατακόρυφο .

απαντήσεις στη Φυσική Β' τάξης

i) Από την διατήρηση της ορμής έχουμε

$$mv_0 = (M+m)v \Rightarrow v = \frac{mv_0}{M+m}$$

με την ταχύτητα αυτή ξεκινάει το συσσωματωμα για να επιφέρει λωτοτική κίνηση. Έτσι $T - (M+m)g = F_k \Rightarrow$

$$T = (M+m)g + \frac{m^2 v_0^2}{2(M+m)}$$

Για το κομμάτι το κίμα πρέπει $T = 52 \text{ N}$ και

$$\text{έτσι } v_0 = 80 \text{ m/s}$$

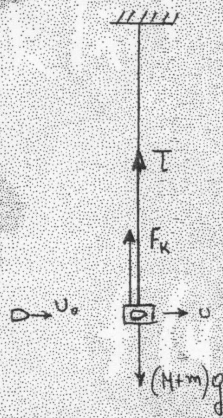
ii) $\frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{kin}}}{\Delta t} = \frac{-\Delta W}{\Delta t} = \frac{-(M+m)g \Delta y}{\Delta t} = -(M+m)g$

παιρνουμε ένα μικρό Δt μέσα στο οποίο το σώμα μετακινείται στην διεύθυνση του βάρους κατά Δy

a) $v_y = 0$ και τότε $\frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{kin}}}{\Delta t} = 0$

b) $v_y = gt$ και $h = \frac{1}{2}gt^2$ από τις οποίες προκύπτει $t = 1 \text{ s}$ και $v_y = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και τότε $\frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{kin}}}{\Delta t} = -2 \cdot 10 \cdot 10 = -200 \frac{\text{Joule}}{\text{s}}$

iii) $\vec{\Delta P} = \vec{\Delta L} = (M+m)\vec{g} \Delta t \Rightarrow \Delta P = (M+m)g \Delta t = 2 \cdot 10 \cdot 1 = 20 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Παραχώρηση Απαρτήσης

Χρήστος Μουρατίδης