ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ 2002 ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ 2002

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Ένα αεροπλάνο πετάει οριζόντια σε ύψος h = 2000 m πάνω από την επιφάνεια της Γης με σταθερή ταχύτητα 720 km / h και αφήνει μια βόμβα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.
Η βόμβα σε όλη τη διάρκεια της κίνησης της προς τη Γη , δέχεται μια σταθερή οριζόντια αντίσταση F = B /2 όπου B το βάρος της .
α) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή , φτάνει η βόμβα στο έδαφος .
β) Ποια είναι η απόσταση της βόμβας από το σημείο που αφέθηκε , τη χρονική στιγμή t = 10 sec .
γ) Είναι δυνατόν οι συνιστώσες χ και ψ να γίνουν ίσες κατά την διάρκεια της κίνησης;
Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Ένα ηλεκτρικά αφόρτιστο σωματίδιο μάζας 3 m , βρίσκεται ακίνητο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το αφόρτιστο σωματίδιο διασπάται σε δύο φορτισμένα , με μάζες m_1 και m_2 για τις οποίες ισχύει $m_1 = 2m_2$. Τα δύο σωματίδια κινούνται σε τροχιές , που βρίσκονται και οι δύο , στο ίδιο επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στην ένταση B . (Οι βαρυτικές και οι ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο σωματιδίων θεωρούνται αμελητέες) . α) Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο , από τη στιγμή της διάσπασης , τα δύο σωματίδια θα συγκρουστούν . β) Υπολογίστε την μέση τιμή της έντασης του ρεύματος , που οφείλεται στην κίνηση των δύο φορτισμένων σωματιδίων που προκύπτουν μετά την διάσπαση . Οι υπολογισμοί να γίνουν συναρτήσει των : m , του φορτίου κάθε σωματιδίου , και της έντασης B του μαγνητικού πεδίου .

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Η ομογενής δοκός μήκους L έχει πολλές ισαπέχουσες τρύπες κάθετες στην μεγάλη διάστασή της L . O τεχνίτης μελετάει την περιστροφή της δοκού γύρω από ένα άξονα που μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις τρύπες και επιδιώκει να πετύχει την μέγιστη αρχική γωνιακή επιτάχυνση , όταν αφήνει ελεύθερη τη δοκό από την οριζόντια θέση να περιστραφεί γύρω από τον άξονα περιστροφής . Επειδή οι θεωρητικές του γνώσεις είναι ελλιπείς κατέφυγε σε επίπονες και πολύωρες πειραματικές μετρήσεις . Άλλαζε την απόσταση χ του άξονα περιστροφής , από το μέσον της δοκού και μετρούσε κάθε φορά την αντίστοιχη αρχική γωνιακή επιτάχυνση . Τελικά κατέληξε ότι η αρχική γωνιακή επιτάχυνση γίνεται μέγιστη όταν η απόσταση χ του άξονα περιστροφής από το μέσον της δοκού είναι ίση με L /6 Με βάση τις θεωρητικές γνώσεις που έχετε , εξετάστε αν η τιμή που βρήκε είναι σωστή . Η δοκός μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα περιστροφής χωρίς τριβές και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα . Η ροπή αδράνειας της δοκού , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής , είναι $\mathbf{I = ML^2 / 12}$ όπου M η μάζα της .

ΘΕΜΑ 2ο

Οριζόντιος τροχός έχει ακτίνα R = 1 m και μάζα M = 2 kg που θεωρούμε ότι είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του. Ο τροχός περιστρέφεται χωρίς τριβές , γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 3$ rad / s .Σαίτα που έχει μάζα m = 100g και κινείται μέσα στο οριζόντιο επίπεδο του τροχού με ταχύτητα υ_0=30m/s και σε απόσταση d = 80cm πάνω από το κέντρο του . Η σαίτα σφηνώνεται και ενσωματώνεται στον τροχό . Υπολογίστε την αρχική κινητική ενέργεια του τροχού και την γωνιακή του ταχύτητα μετά την ενσωμάτωση της σαίτας σ' αυτόν . Η σαίτα είναι το βέλος του τόξου και η μάζα της να θεωρηθεί σημειακή . Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2002

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις :

$\chi^2 - 3(\alpha+\beta)\chi + 2(\alpha^2+\beta^2) + 5\alpha\beta = 0$ (1)

και $\chi^2 - 2\alpha\beta\chi + \alpha^2\beta^2 = 0$ (2) με $\alpha, \beta > 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές (όχι υποχρεωτικά ίσες μεταξύ τους). Ενώ η εξίσωση (2) έχει ρίζες ίσες μεταξύ τους (διπλή ρίζα) .

Να σχηματίσετε μια δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει ρίζες τις διπλάσιες των ριζών της (1) .

Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της (1) και ρ η διπλή ρίζα της (2) να δείξετε ότι :

$\rho_1 . \rho_2 \geq 9\rho$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{9}{4}\chi^2 + \sqrt{p_1.p_2}.\chi + \rho = 0$ έχει ρίζες πραγματικές .

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και ο περιγεγραμμένος του κύκλος με κέντρο Ο . Από το μέσον Μ του τόξου ΒΓ , που δεν βρίσκεται το Α , φέρνουμε την διάμετρο ΜΡ . Από τα Ρ και Μ φέρνουμε τις προβολές Ρ' και Μ' αντίστοιχα στην ΑΒ (στις προεκτάσεις) . Να δείξετε ότι :

α) ΑΡ' = Β Μ'

β) ΑΜ' + ΑΡ' = ΑΓ

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Στις πλευρές ΒΓ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ζ ώστε

ΒΔ = 2/5 ΒΓ και 8 (ΖΒΓ) = 5 (ΑΒΓ)
α) Να δείξετε ότι ΒΖ = 5/8 ΑΒ
β) Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την ευθεία ΓΖ .
γ) Αν Ρ σημείο στην προέκταση της ΑΒ προς το μέρος του Α τέτοιο ώστε
(ΡΖΔΓ) = 9/8 (ΑΒΓ) , να δείξετε ότι ΡΑ = ΑΖ

ΘΕΜΑ 2ο
Αν ημα + ημβ + ημγ = συνα + συνβ + συνγ = 0
με $0 < α < β < γ < 360^0$
α) Να δείξετε ότι : συν (β-α) = - ½
β) Υπολογίστε τις γωνίες β-α , γ-β , γ-α .
γ) Να δείξετε ότι οι α, β , γ , είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου .

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο
Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f : [α,β] --> R με σύνολο τιμών [α , β] όπου α , β ε R_+^* . Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα θ ε [α , β] ώστε να ισχύει
$f^2 (θ) + θ. f (θ) = 2 θ^2$.

ΘΕΜΑ 2ο
Θεωρούμε τη συνάρτηση f με f (x) = ln ($συν^2$ 3x) . Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της D_f να υπολογίσετε την f '(ρ) , όπου ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $ημ^{2002}x = ημ^{2001}ω - 1$, με x ε [0 , π / 2)

Λύσεις

των ασκήσεων Μαθηματικών ΤΑΞΗ Γ'

ΘΕΜΑ Ι

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f^2(x) + x \cdot f(x) - 2x^2$, με $x \in [a, b]$

* Είναι g συνεχής στο $[a,b]$ (άθροισμα-γινόμενο συνεχών συναρτήσεων).

$g(a) = f^2(a) + a f(a) - 2a^2$

$g(b) = f^2(b) + b f(b) - 2b^2$

Για κάθε $x \in [a,b]$ είναι $0 < a \le f(x) \le b$, άρα $a^2 \le f^2(x) \le b^2$ (1)

Επίσης $\left.\begin{array}{l} 0 < a \le f(x) \le b \\ 0 < a \le x \le b \end{array}\right\} (\times)$ $a^2 \le x f(x) \le b^2$ (2)

(1) + (2) $2a^2 \le f^2(x) + x f(x) \le 2b^2$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Για $x = a$ έχω $2a^2 \le f^2(a) + a f(a) \le 2b^2$, δηλαδή $f^2(a) + a f(a) - 2a^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$g(a) \ge 0$

Για $x = b$ έχω $2a^2 \le f^2(b) + b f(b) \le 2b^2$, δηλαδή $f^2(b) + b f(b) - 2b^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$g(b) \le 0$

Επομένως $g(a) \cdot g(b) \le 0$.

* Αν $g(a) \cdot g(b) < 0$, τότε (Θ. Bolzano στο $[a,b]$) υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\theta \in (a,b)$: $g(\theta) = 0 \Leftrightarrow f^2(\theta) + \theta f(\theta) = 2\theta^2$

* Αν $g(a) \cdot g(b) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0$ ή $g(b) = 0$ τότε $\theta = a$ ή $\theta = b$.

Άρα τελικά υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\theta \in [a,b]$: $g(\theta) = 0 \Leftrightarrow$

$f^2(\theta) + \theta f(\theta) = 2\theta^2$.

1A II

...ύρεση του D_f. Πρέπει $\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu^2 3x > 0 \\ \text{Αλλά} \quad \sigma\upsilon\nu^2 3x \geq 0 \end{matrix}\right\}$ Επομένως πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu^2 3x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,/\, x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu^2 3x) \qquad f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 3x} \cdot (\sigma\upsilon\nu^2 3x)' = \frac{2\sigma\upsilon\nu 3x \cdot (\sigma\upsilon\nu 3x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 3x} =$$

;

$$-\frac{2\sigma\upsilon\nu 3x\, \eta\mu 3x \cdot (3x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 3x} = -\frac{3\eta\mu 6x}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}$$

$$\overset{\eta}{\rightarrow} = -6\varepsilon\varphi 3x$$

$$\eta\mu^{2002} x = \eta\mu^{2001} \omega - 1, \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

Αφού $\eta\mu^{2002} x \geq 0$ είναι $\left.\begin{matrix} \eta\mu^{2001}\omega - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu^{2001}\omega \geq 1 \\ \text{Αλλά επειδή } \eta\mu\omega \leq 1 \text{ είναι } \eta\mu^{2001}\omega \leq 1 \end{matrix}\right\}$ $\eta\mu^{2001}\omega = 1 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \eta\mu^{2001}\omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^{2002} x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{Αλλά } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \boxed{x = 0}$$

Επομένως $f'(\rho) = f'(0) = 0$