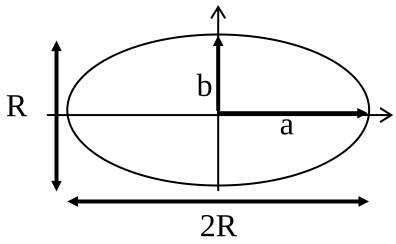
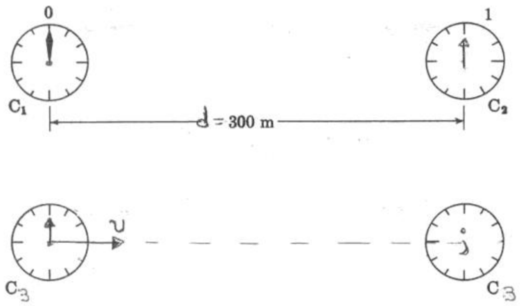
Θέματα Σύγχρονης Ι(Σχετικότητα)
Τμήμα περιττών (14/9/06)



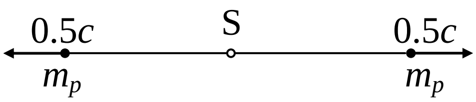
Θέμα 1ο. α) Αν ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας R φαίνεται σε ένα παρατηρητή στη γη με την ελλειπτική μορφή του διπλανού σχήματος, ποια η ταχύτητα του δίσκου ως προς τον παρατηρητή;



β)Ένα ρολόι C_3 τοποθετείται δίπλα στο ρολόι C_1 (βλέπε διπλανό σχήμα) και συγχρονίζεται με το C_1.Κατόπιν το C_3 κινείται απόσταση d με ταχύτητα υ μέχρι να φθάσει δίπλα στο ρολόι C_2. Πόσο πρέπει να μετακινηθεί η ένδειξη του C_3 για να το φέρει σε συγχρονισμό με το C_2; Δώστε την απάντηση σας

ι) αλγεβρικά

ιι) αριθμητικά για υ=0.6c και d=300m.



Θέμα 2ο. Δύο πρωτόνια κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις ξεκινώντας από ένα κοινό σημείο S με ταχύτητες ίσου μέτρου 0.5c, όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα . Να υπολογίσετε:

α)Την ολική σχετικιστική ενέργεια και ορμή ενός από τα πρωτόνια ως προς το κοινό σημείο εκκίνησης S.

β)Την ολική σχετικιστική ενέργεια και ορμή του ενός πρωτονίου ως προς το σύστημα αναφοράς του άλλου.

Η μάζα ηρεμίας m_p του πρωτονίου θεωρείται γνωστή.

Δίνονται οι σχέσεις και οι μονάδες

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ y=y'\quad ,\ t=\frac{t'+\frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ E=\frac{E'+Vp'_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad p_x=\frac{p'_x+\frac{V}{c^2}E'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ \beta=\frac{V}{c}$$

Απαντήσεις θεμάτων

Θέμα 1ο. α) Επειδή ο κυκλικός δίσκος ακτίνας R φαίνεται στον ακίνητο παρατηρητή με την ελλειπτική μορφή του σχήματος ,όπου a=R και b=R/2 σημαίνει ότι ο δίσκος έχει συσταλθεί κατά την διεύθυνση y. Και επειδή συστολή του μήκους συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της κίνησης σημαίνει ότι το διαστημόπλοιο κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα y με ταχύτητα $\upsilon=\upsilon_y$. Σύμφωνα με τη σχέση της συστολής

$$y'=y\sqrt{1-\frac{\upsilon_y{}^2}{c^2}}\ \Rightarrow \mathrm{b}=\mathrm{R}\sqrt{1-\frac{\upsilon_y{}^2}{c^2}}\ \Rightarrow \frac{\mathrm{R}}{2}=R\sqrt{1-\frac{\upsilon_y{}^2}{c^2}}\ \Rightarrow \upsilon_y{}^2=c^2(1-\frac{1}{4})\Rightarrow \upsilon_{\mathrm{y}}=c\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866c$$

β) Για ένα ακίνητο παρατηρητή όταν το ρολόι C_3 φθάσει στη θέση του C_2 ,το C_2 θα δείχνει $t_2 = t_1 + \frac{d}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d}{\upsilon}$.Λόγω της διαστολής του χρόνου για το C_3 θα έχει περάσει χρόνος $\Delta t' = t_2' - t_1 = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$.Άρα για να γίνει η ένδειξη του C_3 σύγχρονη με του C_2 θα πρέπει να μετακινηθεί η ένδειξη του κατά **ι)** $\Delta t - \Delta t' = \Delta t - \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = \Delta t(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}})$

ιι) $\Delta t = \frac{300m}{0.6c}(1-\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}) = 1.66\mu\sec(1-\sqrt{0.84}) = 0.33\mu\sec$

Θέμα 2⁰ α) Για παρατηρητή στο κοινό σημείο εκκίνησης S εφαρμόζοντας τις σχετικιστικές εκφράσεις για την ορμή και την ολική ενέργεια για το πρωτόνιο που κινείται π.χ προς τα αριστερά(Α) βρίσκουμε:

$$p_x{}^A = \frac{m_p(-\upsilon_x)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_x{}^2}{c^2}}} = -\frac{0.5cm_p}{\sqrt{1-\frac{(0.5c)^2}{c^2}}} = -\frac{0.5m_pc}{\sqrt{0.75}} = -0.577m_pc$$

$$E^A = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_x{}^2}{c^2}}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1-\frac{(0.5c)^2}{c^2}}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{0.75}} = 1.154m_pc^2$$

Ομοίως για το πρωτόνιο που κινείται προς τα δεξιά (Δ) $p_x{}^\Delta = 0.577m_pc$ και $E^\Delta = 1.154m_pc^2$

β) Θεωρούμε παρατηρητή S' που κινείται μαζί με το πρωτόνιο (έστω αυτό που κινείται προς τα δεξιά) με ταχύτητα $V = \upsilon = 0.5c$. Για τον παρατηρητή αυτό θα ισχύουν

$$p_x'{}^A = \gamma(p_x{}^A - \frac{V}{c^2}E^A) = \frac{1}{\sqrt{0.75}}(-\frac{0.5m_pc}{\sqrt{0.75}} - \frac{0.5c}{c^2}\frac{m_pc^2}{\sqrt{0.75}}) = -\frac{m_pc}{0.75} = -1.333m_pc$$

$$E'^A = \gamma(E^A - Vp_x{}^A) = \frac{1}{\sqrt{0.75}}(\frac{m_pc^2}{\sqrt{0.75}} - 0.5c\frac{-0.5c}{\sqrt{0.75}}) = \frac{1.25}{0.75}m_pc^2 = 1.666m_pc^2$$

που δίνουν την ορμή και την ολική ενέργεια του ενός πρωτονίου(αυτού που κινείται προς τά αριστερά) ως προς το άλλο.
ομοίως βρίσκουμε ότι η ορμή και η ολική ενέργεια του πρωτονίου που κινείται προς τα δεξιά ως προς το άλλο είναι

$$p_x'{}^\Delta = \gamma(p_x{}^\Delta - \frac{V}{c^2}E^\Delta) = 1.333m_pc$$

$$E'^\Delta = \gamma(E^\Delta - Vp_x{}^\Delta) = \frac{1}{\sqrt{0.75}}(\frac{m_pc^2}{\sqrt{0.75}} - 0.5c\frac{-0.5c}{\sqrt{0.75}}) = \frac{1.25}{0.75}m_pc^2 = 1.666m_pc^2$$

<u>Εναλλακτικός τρόπος:</u> Θα μπορούσαμε να εργαστούμε με τις σχέσεις μετασχηματισμού των ταχυτήτων υπολογίζοντας την ταχύτητα του ενός πρωτονίου ως προς το άλλο και στην συνέχεια να εφαρμόσουμε τις γενικές εκφράσεις της ορμής και της ολικής ενέργειας. Πιο συγκεκριμένα:
Θεωρούμε παρατηρητή S' που κινείται μαζί με το πρωτόνιο στα δεξιά με ταχύτητα $V = \upsilon = 0.5c$. . Για τον παρατηρητή αυτό θα ισχύει

$$\upsilon'^{\,\mathrm{A}}_x = \frac{\upsilon_x^{\,\mathrm{A}} - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x^{\,\mathrm{A}} V}{c^2}} = \frac{-0.5c - 0.5c}{1 - \dfrac{(-0.5c)0.5c}{c^2}} = -0.8c \text{ οπότε },$$

$$p'^{\,\mathrm{A}}_x = \frac{m_p \upsilon'^{\,\mathrm{A}}_x}{\sqrt{1 - \dfrac{(\upsilon'^{\,\mathrm{A}}_{\mathrm{x}})^2}{c^2}}} = -\frac{0.8 m_p c}{\sqrt{1 - \dfrac{(-0.8c)^2}{c^2}}} = -1.333 m_p c \text{ και } E'^{\,\mathrm{A}} = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{(-0.8c)^2}{c^2}}} = 1.666 m_p c^2$$